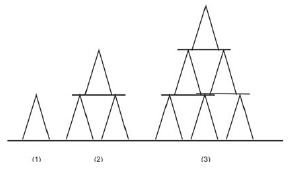
**Problema 1**

En la siguiente figura se tienen castillos de cartas de 1, 2 y 3 pisos, para los cuales se han usado 2, 7 y 15 cartas respectivamente. ¿Cuántas cartas se necesitarán para formar un castillo de 10 pisos?



**Problema 2**

Cuantos números de cuatro cifras distintas se pueden armar con los dígitos a, b, c, d que cumplan las siguientes condiciones:

**Problema 3**

Sea  un triángulo equilátero y  un cuadrado construido externamente al triángulo. Demostrar que el circunradio del triángulo  es igual al lado del cuadrado.

**Problema 4**

Los números  están escritos en una pizarra. Alfonso y Beatriz juegan con estos números de la siguiente manera, por turnos, cada uno de ellos borra un número de la lista hasta que queden solamente dos números. Si la diferencia de estos dos números restantes es múltiplo de  Beatriz es la ganadora, caso contrario el ganador es Alfonso. Alfonso comienza el juego. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicarla.

**Problema 5**

La mamá de Juan le envía a que cuente cuantos autos de color Rojo, Verde, Amarillo, Azul y Negro, hay en el parqueadero de su casa. Juan es muy despistado y al llegar de vuelta a casa no recordaba las cantidades. Al preguntarle su mamá cuantos carros habían de cada color respondió:

* Si sumaba las cantidades o las multiplicaba daba el mismo resultado.
* Había más de un carro verde.
* Habían mas azules que verdes.

Puede la mamá de Juan saber cuántos autos de cada color habían?

**Problema 6**

En los vértices de un cubo hay que escribir con azul los números enteros de 1 a 8 inclusive, sin repeticiones. A continuación, en cada arista se escribe con rojo la diferencia de los números azules de sus dos extremos (el mayor menos el menor). Distribuir los números azules para que la cantidad de números rojos distintos sea la menor posible.

**Problema 7**

Reemplazar cada una de las cinco letras por un dígito distinto, para que la siguiente multiplicación sea correcta.

D A Ñ O S

X 4

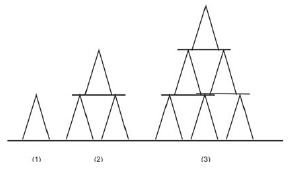
S O Ñ A D

**SOLUCION PRUEBA FINAL**

**MATEMATICAS BASICO**

**Problema 1**

En la siguiente figura se tienen castillos de cartas de 1, 2 y 3 pisos, para los cuales se han usado 2, 7 y 15 cartas respectivamente. ¿Cuántas cartas se necesitarán para formar un castillo de 10 pisos?



SOLUCIÓN:

Se observa fácilmente que en el piso base del castillo de 1 piso hay una figura en forma de V invertida, que consta de dos cartas. En el castillo de 2 pisos hay dos de estas figuras en el piso base y una en el piso encima. En el castillo de 3 pisos hay tres de estas figuras en el piso base, en el piso encima dos figuras y en el piso superior una figura. Para un castillo de 10 pisos habrán 10 de estas figuras en el piso base y para cada piso superior una menos que en el piso anterior, esto es  de estas figuras (dos cartas por figura). Además para cada piso excepto el piso base, cada una de estas figuras debe tener una carta apoyándola por debajo, es decir  cartas de apoyo.

En total entonces tendremos  cartas en un castillo de 10 pisos.

**Problema 2**

Cuantos números de cuatro cifras distintas se pueden armar con los dígitos a, b, c, d que cumplan las siguientes condiciones:

SOLUCIÓN:

Si a=1, los cuatro dígitos son 1, 3, 5, 7. Con estos dígitos podemos formar números de cuatro cifras.

Si a=2, los cuatro dígitos son 2, 4, 6, 8. Con estos dígitos podemos formar números de cuatro cifras.

Si a=3, los cuatro dígitos son 3, 5, 7, 9. Con estos dígitos podemos formar números de cuatro cifras.

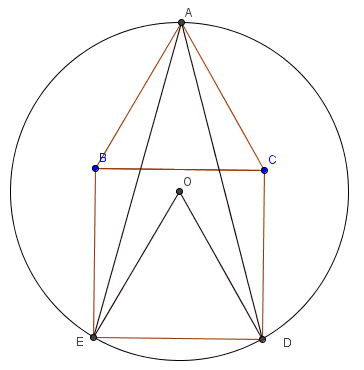
Si a=4, los cuatro dígitos son 4, 6, 8, 10. Lo cual no sería admisible, puesto que el 10 usa más de un digito, y con esto concluimos que ***a*** no puede ser mayor o igual a 4.

Por tanto podemos formar números diferentes con las condiciones indicadas.

**Problema 3**

Sea  un triángulo equilátero y  un cuadrado construido externamente al triángulo. Demostrar que el circunradio del triángulo  es igual al lado del cuadrado.

SOLUCIÓN:



El lado del cuadrado  es igual al lado del triángulo , ya que cada figura tiene sus respectivos lados iguales y tienen el lado  en común. Por lo tanto el triángulo  es isósceles. Además el ángulo , de lo que se concluye que , análogamente deducimos lo mismo en el triángulo . Por lo tanto .

Sea  el centro de la circunferencia circunscrita del triángulo . Por relación del ángulo inscrito tenemos que . Pero el triángulo  es isósceles, ya que  (radios de la circunferencia circunscrita). Por lo tanto el triángulo  es equilátero y tendremos que el lado del cuadrado  es igual al radio de la circunferencia circunscrita del triángulo , como se pedía demostrar.

**Problema 4**

Los números  están escritos en una pizarra. Alfonso y Beatriz juegan con estos números de la siguiente manera, por turnos, cada uno de ellos borra un número de la lista hasta que queden solamente dos números. Si la diferencia de estos dos números restantes es múltiplo de  Beatriz es la ganadora, caso contrario el ganador es Alfonso. Alfonso comienza el juego. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicarla.

SOLUCIÓN:

Beatriz tiene una estrategia ganadora y es la siguiente:

Supongamos que Alfonso borre el número , entonces bastaría que Beatriz elija el número , es decir un número cuya raíz sumada a la raíz del otro de igual a , esto siempre se puede hacer, basta considerar la siguiente lista:



Para el cuadrado de cualquiera de los números que estén en la lista que elija Alfonso, Beatriz elige el cuadrado del número que esté al frente del primero en esta lista y asegurará su victoria, esto es, debido a que luego de un cierto número de pasos solo quedarán dos números que estarán uno frente a otro en la lista. Es decir algún número  y , la diferencia de estos cuadrados será , claramente un múltiplo de .

**Problema 5**

La mamá de Juan le envía a que cuente cuantos autos de color Rojo, Verde, Amarillo, Azul y Negro, hay en el parqueadero de su casa. Juan es muy despistado y al llegar de vuelta a casa no recordaba las cantidades. Al preguntarle su mamá cuantos carros habían de cada color respondió:

* Si sumaba las cantidades o las multiplicaba daba el mismo resultado.
* Había más de un carro verde.
* Habían mas azules que verdes.

Puede la mamá de Juan saber cuántos autos de cada color habían?

SOLUCIÓN:

Tenemos que buscar 5 enteros positivos que multiplicados sean igual que sumados.

Sean los enteros positivos de satisfacen

Ordenados de menor a mayor

Notemos que todas estas fracciones son menores o iguales que la última , Luego, como la suma de 5 fracciones menores que 1/5 es menor que 1.

Tenemos así que

De estas dos desigualdades se deduce que y.

Para

Si no hay solución porque se eliminan las e

Si , tenemos de lo que resulta

Si d = 3, tenemos y el valor de

Si d=4, tenemos y el resultado no es entero.

Se observa también que como entonces no puede ser

Para

Si , tenemos y el valor de

Si d = 3, tenemos y el valor de no es entero

Si d=4, tenemos 8 y el resultado no es entero.

De igual manera que el caso anterior como entonces no puede ser . Y tampoco puede ser mayor que 2

De este análisis se encuentra tres conjuntos que cumplen esa condición:

Como hay más de un carro verde, Pueden ser 2,3 o 5. Pero como hay más azules que verdes. Deben haber 5 azules, 2 verdes, 1 Amarillo, 1 Negro y 1 Rojo.

**Problema 6**

En los vértices de un cubo hay que escribir con azul los números enteros de 1 a 8 inclusive, sin repeticiones. A continuación, en cada arista se escribe con rojo la diferencia de los números azules de sus dos extremos (el mayor menos el menor). Distribuir los números azules para que la cantidad de números rojos distintos sea la menor posible.

SOLUCIÓN:

En alguno de los vértices esta el número 1, y los tres conectados a éste producen 3 diferencias distintas: , donde y son los números de los vértices vecinos del 1. Por lo tanto hay por lo menos 3 diferencias distintas.

Es posible distribuir los números para que haya sólo 3 números distintos en las aristas. Hay varias maneras de lograrlo y una de ellas es la siguiente.

1

5

6

2

4

3

78

8

2

2

2

2

4

4

4

1

1

1

1

4

**Problema 7**

Reemplazar cada una de las cinco letras por un dígito distinto, para que la siguiente multiplicación sea correcta.

D A Ñ O S

X 4

S O Ñ A D

SOLUCIÓN:

Como es un múltiple de 4, su último dígito, , debe ser par. Por otro lado, tiene 5 dígitos, por lo que , de donde .

Para entonces , pero si entonces y , lo que es imposible, pues 4.. Por lo tanto, .

Si miramos las posibilidades para el último dígito de , obtenemos que puede ser 3 u 8. Si en cambio, miramos las posibilidades para el primer dígito de , obtenemos que puede ser 8 o 9. Por lo tanto .

Como y , en la multiplicación 4ª no hay acarreo. Luego, A puede ser 0,1 o 2. Por otro lado, es un múltiplo de 4 que termina en 2, opciones serían 12, 32, 52, 72, 92 por lo que , y debe terminar en 1, puede ser 2 o 7, pero como el 2 ya se uso,

El segundo dígito de se obtiene sumándole a el acarreo correspondiente. Entonces, como , dicho acarreo es 3. Los valores de Ñ que pueden producir ese acarreo igual a 3 son 7,8 y 9. Como 7 y 8 ya se usaron

Entonces y .